УДК 004.942:336.764.061

О. Г. Яковенко, К. М. Заворотченко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МОДЕЛЮВАННЯ ПОРТФЕЛЯ ОПЦІОНІВ З УРАХУВАННЯМ ЦІНОВИХ ОЧІКУВАНЬ ЗА БАЗОВИМИ АКТИВАМИ

Запропоновано модель процесу формування портфелю, що складається з опціонів. Враховано цінові очікування по базових активах, схильність інвестора до ризику та обмеженість у початковому капіталі. Адекватність моделі перевірена на існуючих стратегіях.

Ключові слова: опціон, портфель, деривативи.

Предложена модель процесса формирования портфеля, состоящего из опционов. Учтены ценовые ожидания по подлежащим активам, склонность инвестора к риску и ограниченность в начальных инвестициях. Адекватность модели проверена на существующих стратегиях.

Ключевые слова: опцион, портфель, деривативы.

The model of the options portfolio formation, suggested in the paper, takes into account the price expectations for the underlying assets, the investor's attitude towards risk, and the initial capital limit. The adequacy of the model has been verified against existing strategies

Key words: option, portfolio, derivatives.

Актуальність. Ринок похідних фінансових інструментів – один із динамічних сегментів світових фондових ринків. В Україні процес реєстрації похідних цінних паперів почався з 2000 року [6]. Одним із активів на ринку деривативів є опціон. Існує ряд переваг інвестування в опціони, а саме: теоретично необмежений дохід, що залежить від темпів зростання ціни базового інструмента, обмежені (розміром опціонної премії) втрати, можливість отримання великого прибутку від інвестованого капіталу за порівняно невеликого зростання ціни базового активу. Тому моделювання поведінки інвестора на фінансовому ринку з використанням опціонів та їх комбінацій є актуальним.

Аналіз останніх наукових публікацій. Існують різні підходи до побудови оптимізаційних моделей з урахуванням фактора невизначеності фондового ринку. О. Недосєкін [1] досліджує задачі нечіткого лінійного програмування, в основі яких лежать гнучкі граничні обмеження, нечіткі обмеження або нечітка цільова функція. Леоні [2] за допомогою методу Монте-Карло моделює поведінку портфелю деривативів у довготривалому періоді, щоб визначити ефективність стратегій оптимізації, орієнтованих на зменшення ризику збитків. Р. Колб [4] моделює дельта-, гамма- та ро-нейтральні портфелі, тобто ті, які будуть менш чутливими до зміни конкретних фінансових параметрів. У [5] розроблено оптимізаційну модель керування біржовим портфелем похідних фінансових інструментів у режимі реального часу і враховано відмінність у цінах покупки і продажу фінансових інструментів, а також комісію, яка стягується брокером при здійсненні операцій.

Мета дослідження. Метою розробки є визначення оптимальних пропорцій інвестування в опціони за умови, що відомі цінові очікування по базових активах, які відповідають цим опціонам. Оптимальним вважається такий склад портфеля, що очікуваний прибуток у момент його реалізації максимальний, при цьому враховується обмеженість початкового капіталу інвестора та його припустимий ризик – сума яку інвестор готовий втратити в разі несприятливої ситуації. Для знаходження оптимального складу портфелю будується модель, що дозволить звести дану задачу до задачі математичного програмування та знайти її розв'язок з використанням стандартних прикладних пакетів програм.

Основні результати досліджень. Інвестор визначає склад портфеля деривативів. Ціни базових активи в опціонах зазвичай величини незалежні: так ціни на акції двох підприємств різних галузей ніяк між собою не корелюють. Тому доцільно розглядати портфель опціонів на один і той же актив для спрощення розрахунків. Нехай портфель складається з опціонів як пут, так і кол на один і той же базовий актив (наприклад, акції одного підприємства). Причому можна по цих опціонах зайняти як довгу, так і коротку позицію. Оскільки кількість покупців та продавців опціонів на ринку обмежена та визначена, то кількість опціонів, яку можливо купити або продати також обмежена. Для покупки опціонів у інвестора є початковий капітал. В опціонах указана різна ціна виконання (ціна страйк) – через це вони коштують по-різному. Критерієм оптимальності є максимізація очікуваного прибутку – тобто прибутку від реалізації опціонів з урахуванням розподілу цін за базовими активами та початковими витратами. Також інвестор визначає деяку суму, яку він готовий витратити в разі настання несприятливої ситуації. Ця сума визначає його схильність ризикувати.

Позначимо ціну страйк опціона – $P_i, i = \overline{1,n},$ початковий капітал – К. Позначимо через y_i – кількість у портфелі проданих опціонів-кол з P_i-ю ціною страйк $i = \overline{1,n},$ а x_j – кількість у портфелі проданих опціонів-пут з P_j-ю ціною страйк $j = \overline{1,n};$ $\hat{y}_i$ – кількість у портфелі куплених опціонів-кол з P_i-ю ціною страйк $i = \overline{1,n},$, а $\hat{x}_j$ – кількість у портфелі куплених опціонів-пут з P_j-ю ціною страйк $j = \overline{1,n},$ де n – задана кількість рівнів цін на які виписуються опціони на ринку. Розглянемо період часу $[0,t]$, де початкового моменту 0 формується портфель, а в кінцевий момент t надходить термін виконання опціонів у портфелі. C_{xi} – ціна продажу опціона-пут з P_j-ю ціною страйк у початковий момент часу. C_{yi} – ціна продажі опціона-кол з P_i-ю ціною страйк у початковий момент часу. $\hat{C}_{xi}$ – ціна покупки опціона-пут з P_i-ю ціною страйк у початковий момент часу. $\hat{C}_{yi}$ – ціна покупки опціона-кол з P_i-ю ціною страйк у початковий момент часу. P_0 – ціна на базовий актив у кінцевий момент часу. Ціни на купівлю $\hat{C}_{xi}$ та продаж C_{xi} опціонів-пут відрізняються через те, що за біржовими опціонами існує механізм на величину «штрафу». Те ж саме стосується і цін на купівлю $\hat{C}_{yi}$ та продаж C_{yi} опціонів-кол. У даному випадку «штрафом» є вартість складання контракту з купівлі-продажу опціонів на біржі.

Отже, грошовий потік у початковий період часу при формуванні портфелю складає: при купівлі опціонів-кол з P_i ціною страйк витрачається $\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \times \hat{C}_{yi}$. Купуючи опціони-пут – $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \times \hat{C}_{xi}$. Продаючи опціони-кол у початковий період часу буде отримано $\sum_{i=1}^{n} y_i \times C_{yi}$. Продаючи опціони-пут – $\sum_{i=1}^{n} x_i \times C_{xi},\ \ i = \overline{1,n}.$ Враховуючи, що у початковий період наявна сума грошей рівна K і звичайно не можливо витратити більше цього, отримуємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \times \hat{C}_{yi} + \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \times \hat{C}_{xi} - \sum_{i=1}^{n} y_i \times C_{yi} - \sum_{i=1}^{n} x_i \times C_{xi} \le K$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i \times \hat{C}_{yi} + \hat{x}_i \times \hat{C}_{xi} - y_i \times C_{yi} - x_i \times C_{xi} \right) \le K.$$

Позначивши через $Z_i = \hat{y}_i \times \hat{C}_{yi} + \hat{x}_i \times \hat{C}_{xi} - y_i \times C_{yi} - x_i \times C_{xi},$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \le K. \tag{1}$$

Тепер розглянемо грошовий потік кінцевого моменту часу.

У розпорядженні є опціони двох типів за двома позиціями кожен (довга позиція на кол і пут та коротка позиція на кол і пут). Для опціонів з ціною-страйк P_i маємо такі нерівності:

1. Якщо $P_i > P_0$, тобто реальна ціна базового активу виявилася менша ніж вказана в опціоні. Тоді має сенс реалізовувати право на продаж за ціною вказаній в опціоні пут та залишити нереалізованими опціони на покупку. Це є логічним, тому вважається, що всі контрагенти притримуються такої тактики.

Виконуючи наявні в портфелі опціони-пут отримаємо наступні розрахунки: реалізовуючи куплені опціони-пут придбано $\hat{x}_i$ акцій по ціні P_0 і продано їх за ціною P_i. Виконуючи продані опціони-пут за вимогою покупця куплено x_i акцій по ціні P_i у тримача опціону та продано їх за ціною P_0. Опціони-кол залишаться нереалізованими та принесуть нульовий результат. Кінцевий фінансовий результат:

$$P_i \times \hat{x}_i - P_0 \times \hat{x}_i - P_i \times x_i + P_0 \times x_i = (P_i - P_0)\hat{x}_i - (P_i - P_0)x_i. \qquad (2)$$

2. Якщо $P_i < P_0$, тобто реальна ціна базового активу виявилася вища ніж вказана в опціоні. Тоді є сенс реалізовувати право на покупку активів за нижчою ціною, вказаній в опціоні та залишити нереалізованими опціони на продажу. Також покладено, що всі контрагенти притримуються такої тактики.

Виконуючи опціони-кол з яких складається портфель: реалізовуючи куплені опціони-кол купується $\hat{y}_i$ акцій по ціні вказаній в опціоні P_i та продано їх за вищою ціною P_0. Виконуючи продані кол-опціони за вимогою покупця купується y_i акцій за ціною P_0 та продано за ціною вказаною у опціоні P_i. Опціони-пут залишаться нереалізовані

$$-P_i \times \hat{y}_i + P_0 \times \hat{y}_i + P_i \times y_i - P_0 \times y_i = (P_i - P_0)y_i - (P_i - P_0)\hat{y}_i. \qquad (3)$$

Об'єднавши випадки (2,3) маємо, що прибуток (збиток) від деякої комбінації опціонів з однаковою ціною P_i виконання дорівнює:

$$\Pi_i = \begin{cases} (P_i - P_0)\hat{x}_i - (P_i - P_0)x_i, \text{якщо\_} P_i - P_0 \ge 0 \\ (P_i - P_0)y_i - (P_i - P_0)\hat{y}_i, \text{якщо\_} P_i - P_0 < 0 \end{cases}$$

цю функцію можна переписати у вигляді:

$$\Pi_i = \max(P_i - P_0; 0)\hat{x}_i - \max(P_i - P_0; 0)x_i + \min(P_i - P_0; 0)y_i - \min(P_i - P_0; 0)\hat{y}_i.$$

Функція прибутку залежить від невідомих $\Pi_i(x_i, \hat{x}_i, y_i, \hat{y}_i)$, $i = \overline{1, n}$ та при заданих фіксованих значеннях P_0 та P_i є лінійною.

Якби ціни на акції були точно відомі заздалегідь, то потреби в хеджуванні ризику не виникало. Насправді ж величина P_0 невідома, а відомі ймовірності відповідно цін базового активу P_{0j}, $j = \overline{1, m}$. Ймовірностний розподіл ціни акції може бути записан таблично (табл. 1).

Таблиця 1

Розподіл цін на базові активи

Ціна, P_{0j}	30	33	36	38
Ймовірність, Pr_j	0,1	0,4	0,4	0,1

де, P_{0j} – одна з очікуваних цін на базовий актив в майбутньому $j = \overline{1, m}$, Pr_j – ймовірності, що ціна на базовий актив в майбутньому набуде значення P_{0j}: $\sum_{j=1}^{m} P_{0j} = 1$.

Таким чином шуканим є не сам прибуток, а величина його математичного сподівання

$$M\Pi_i = \sum_{j=1}^{m} \Pr_j \cdot \Pi_{ij}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Слід зазначити, що $МП_i$ це очікуваний прибуток, при формуванні портфелю з опціонів з однаковою (фіксованою) ціною страйк P_i. Вже згадувалось при опису моделі, що на ринку присутні опціони з декількома рівнями цін-страйк і для формування портфелю можуть бути використані вони всі. Отже, загальний прибуток від виконання опціонів складе

$$\sum_{i=1}^{n} МП_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Pr}_j \cdot П_{ij},$$

враховуючи початкові витрати:

$$\sum_{i=1}^{n} МП_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Pr}_j \cdot П_{ij} - \sum_{i=1}^{n} Z_i. \quad (4)$$

Так як отримана функція має лінійно-стохастичний вигляд, то при знаходженні оптимального розв'язку може виникнути випадок, коли вигідно купувати значну кількість опціонів одного виду, або продати «нескінченну» кількість опціонів іншого. Але в реальних умовах це неможливо, бо сама природа опціону визначає, що є обмежена кількість продавців, які продають обмежену кількість опціонів у певний час. Те саме стосується і покупців. Тож до моделі доцільно ввести додаткові обмеження, які б описували ці припущення.

Нехай насиченість ринку опціонами така, що не можливо продати більше ніж a_i опціонів-кол з P_i-ю ціною страйк та b_i опціонів-пут, купити більше ніж c_i опціонів-кол та d_i опціонів-пут $i = \overline{1,n}.$ Величини a_i, b_i, c_i та d_i відомі

$$y_i \le a_i, i = \overline{1,n}, \quad x_i \le b_i, i = \overline{1,n}, \quad \hat{y}_i \le c_i, i = \overline{1,n}, \quad \hat{x}_i \le d_i, i = \overline{1,n}. \quad (5)$$

Також цілком логічно припустити, що інвестор, незважаючи на малу ймовірність несприятливої ринкової ситуації, не захоче у випадку її настання нести значні збитки. Величина збитків більше якої інвестор ризикувати не хоче характеризує його обережність або консервативність та є в моделі константою. Для прикладу знову звернемося до табл. 1 – навіть при такому розподілу ймовірностей на очікувані ціни базового активу припускається, що інвестор не захоче продавати забагато опціони-кол зі страйк-ціною 33 оскільки у випадку настання ціни 38 (хоча ця ймовірність і є невеликою) він змушений буде сплачувати по 38–33=5 у. о. з кожного проданого опціону. Тобто для кожної ймовірної ціни P_{0j} $j = \overline{1,m}.$ кінцевий результат не повинен бути менше заданої величини L:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(П_{ij} - Z_i \right) \le L, j = \overline{1,m}. \quad (6)$$

Враховуючи вираз (1) та вирази (4),(5),(6) отримуємо математичну модель оптимізації портфелю опціонів

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Pr}_{jj}\, П \; - \sum_{i=1}^{n} Z \;\to \max$$

при системі обмежень (7).

Таким чином, отримано математичну лінійно-стохастичну модель комбінаторної оптимізації. Її розв'язок можливий за допомогою програмного забезпечення Excel та функції Пошук розв'язків.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Z_i \le K \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\Pi_{ij} - Z_i \right) \le L, \; j = \overline{1,m} \\ y_i \le a_i, i = \overline{1,n} \\ x_i \le b_i, i = \overline{1,n} \\ \widehat{y}_i \le c_i, i = \overline{1,n} \\ \widehat{x}_i \le d_i, i = \overline{1,n} \\ y_i, x_i, \widehat{y}_i, \widehat{x}_i \ge 0 ... i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{7}$$

де Π_{ij} та Z_i функції виду:

$$\Pi_{ij} = \max\left(P_i - P_{0j};0\right)\widehat{x}_i - \max\left(P_i - P_{0j};0\right)x_i + \min\left(P_i - P_{0j};0\right)y_i - \min\left(P_i - P_{0j};0\right)\widehat{y}_i$$

$$Z_i = \widehat{y}_i \times \widehat{C}_{yi} + \widehat{x}_i \times \widehat{C}_{xi} - y_i \times C_{yi} - x_i \times C_{xi}$$

Для прикладу порівняємо результати однієї з поширених опціонних стратегій – спред «бика» та побудованої моделі. Спред «бика» [3] – це стратегія, що складається з покупки опціону-колл з ціною виконаня *K*1 і продажу опціону-кол з ціною виконання *K*2 > *K*1 (рис. 1). Графік прибутку, отриманого завдяки двум опціонним позиціям окремо зображений пунктиром. Прибуток від усієї стратегії є їх сумою та зображений суцільною лінією, а S_t – ціна акції в момент виконання обох опціонів.

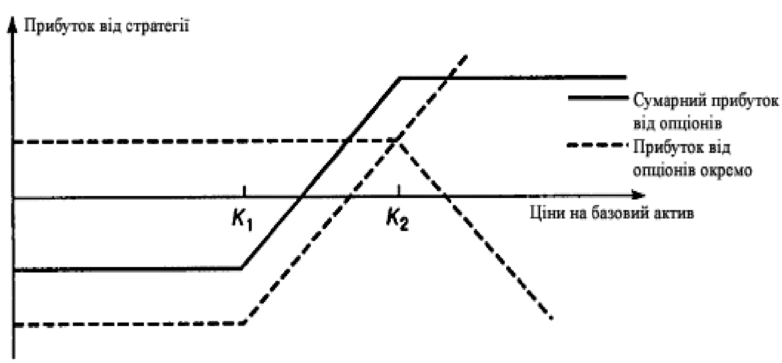

Рис. 1. Стратегія «бика»

До цього спреду інвестори звертаються, коли розраховують на підвищення курсу базового активу, обмежуючи величину своїх втрат. Але ця комбінація обмежує і величину виграшу.

Нехай очікуваний розподіл ймовірностей на ціни базового активу має вигляд:

Таблиця 2

Очікувані ціни на акції

Ціна, P_{0j}	18	20	22	24	26
Ймовірність, Pr_j	0,1	0,1	0,2	0,35	0,25

Та вихідні дані наступні:

$P_1 = 20$	$C_{x1} = 0{,}43$	$b1 = 10$	$C_{y1} = 1{,}4$	а1 = 40	$\hat{C}_{x1} = 0{,}45$	$d1 = 50$	$\hat{C}_{y1} = 1{,}45$
$P_2 = 22{,}5$	$C_{x2} = 0{,}55$	$b2 = 40$	$C_{y2} = 1{,}1$	а2 = 10	$\hat{C}_{x2} = 0{,}6$	$d2 = 10$	$\hat{C}_{y2} = 1{,}1$
$L = -60$	$K = 20$	$c1 = 40$	$c2 = 40$				

При розв'язанні шукана комбінація опціонів та очікуваний чистий дохід від портфелю складе:

$y_1 = 0$	$x_1 = 10$	$\hat{y}_1 = 25$	$\hat{x}_1 = 0$	Ц. ф.=44,55
$y_2 = 10$	$x_2 = 4$	$\hat{y}_2 = 0$	$\hat{x}_2 = 0$	

Якщо діяти за стратегією спред «бика», то в рамках доступного бюджету ($K = 20$) буде отримано наступні результати:

$\hat{y}_1 = 21$ $\quad y_2 = 10$ $\quad$ Ц. ф.=35,85

Видно, що очікуваний фінансовий результат від побудованої моделі більший ніж від стратегії.

Наведений графік в якому кожній ціні P_{0j} відповідає отриманий прибуток без урахування ймовірностей (рис. 2). Пунктирною лінією зображено прибуток при стратегії спред «бика», суцільною – від побудованої моделі.

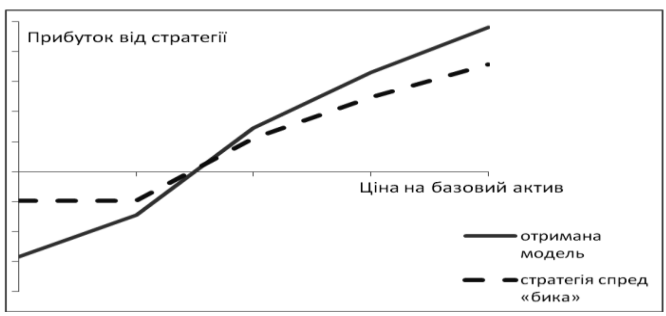

Рис. 2. Порівняння моделі та стратегії «бика» без урахування ймовірностей

З графіку видно, що без урахування ймовірностей дана модель передбачає більший прибуток у разі росту ціни, але й більші збитки (але не більші за задану величину – L).

Порівняємо з результатами при урахуванні ймовірностей (рис. 3). Очікуваний прибуток від моделі більший за очікуваний від стратегії. При цьому очікувані збитки в разі несприятливої ситуації різняться незначно.

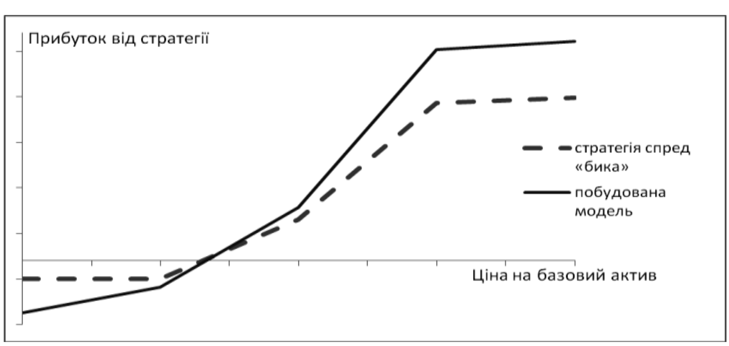

Рис. 3. Порівняння моделі та стратегії «бика» з урахуванням ймовірностей

Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким чином, побудована математична модель оптимізації портфеля, що складається з опціонів, яка враховує обмеженість коштів на інвестиції та «обережність» інвестора. Модель дозволяє знайти оптимальні пропорції інвестування в опціони, якщо відомий розподіл цін на базовий актив. Порівнюючи побудовану модель з існуючими стратегіями (зокрема зі стратегією «бика») можно зробити висновок, що дана модель дозволяє знайти такий склад портфелю при якому очікуваний прибуток більший, ніж знайдений за допомогою стратегії, а очікувані витрати різняться незначно, адже в моделі вони обмежені величиною схильності інвестора до ризику – тобто сумою, яку він згоден пожертвувати в разі несприятливої ситуації. При проведенні подальших досліджень можна розширити портфель, включаючи до нього опціони з різними базовими активами. Це дозволить, не маючи змоги спрогнозувати ціни на акції підприємств, але знаючи залежність між ними, скласти портфель, в якому втрати через падіння ціни на акції одного підприємства будуть компенсуватися через зростання цін на акції іншого.

Бібліографічні посилання

1. **Недосекин А. О.** Оптимизация фондового портфеля, содержащего put-опционы / А. О. Недосекин // Банки и Риски. – 2005. – № 1.

2. **Patrick L. Leoni.** Stop-loss strategies and derivatives portfolios / Patrick L. Leoni // International Journal of Business Forecasting and Marketing Intelligence. – 2008. – № 1. – С. 82–93.

3. **Джон К. Халл.** Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инстументы / Джон К. Халл. – «Вильямс», 2008. – 1044 с.

4. **Колб Р. У.** Финансовые деривативы: пер. с англ. / Р. У. Колб. – М., 1997. – 359 с.

5. **Яковенко О. Г.** Математичні моделі процесів активності в економічній динаміці: монографія / О. Г. Яковенко. – Д., 2010. – 196 с.

6. Звіт державної комісії з цінних паперів та фондового ринку за 2002 рік [Електронний ресурс] – Режим доступу до звіту : http://www.ssmsc.gov.ua/UserFiles/File/2002part2.zip

Надійшла до редколегії 29.03.11